Grado en Ingeniería Civil

Matemáticas I - Convocatoria febrero 2015 - Grupos A, B, C y D

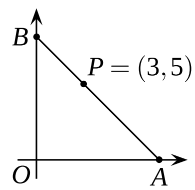
1. (1,5 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\mathrm{e}^x-3x^2$.

   a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos tres soluciones reales.

   b) Prueba que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

2. (2 puntos)

   Determina la recta que pasa por el punto $(3,5)$ que forma con los ejes coordenados un triángulo OAB de área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



3. (2 puntos) Dado $t>0$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva:

$$y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}}\qquad (0\leqslant x\leqslant t)$$

   Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

4. (2 puntos) Sea el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+1$$

   a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f.

   b) Calcula los extremos absolutos de f en el círculo $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

5. (1,5 puntos) Calcula la integral doble:

$$\iint\limits_A \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

   donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\right\}.$$

6. (1 punto)

   a) Enuncia el teorema de Bolzano.

   b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo.

   c) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua. Definamos $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por:

$$F(x)=\int_0^x x^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Justifica que F es derivable y calcula su derivada.

Granada, 26 de enero de 2015